

6月30日の復習

クーロンの法則

2つの電荷 Q_1 [C]と Q_2 [C]が、距離 r [m]離れておかれているときに、電荷に働く電気力 F [N]は以下の式で与えられる。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_s\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r^2} \quad [\text{N}]$$

電界の定義

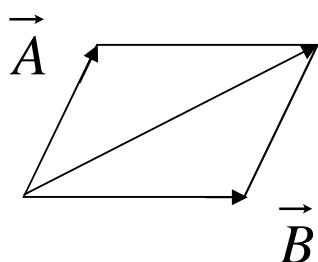
ある電荷内に+1 Cの電荷を置いた時、この電荷に1 Nの電気力が作用するとき、電界の強さを1 V/mと定義する。

定義から、電界 \vec{E} [V/m]のところ、電荷 Q [C]を置いた時、この電荷に働く電気力 \vec{F} [N]は、次式のようになる。

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

1 Cの点電荷に働く電気力の大きさが、電界の強さになる。
(つまり、 $Q=1$ と置いてみること。)

力(ベクトル)の合成



$$\vec{A} + \vec{B}$$

平行四辺形を描く。

対角線がベクトルの合成になる。

電気力線 : 電荷以内に正の電荷を置くと、この電荷は力を受けて移動する。この軌跡の事を言う。動く方向に矢印をつける。

電気力線の定義 : 電界 1 V/m のところで、電界(または電気力線)に垂直な 1 m² の面積を、垂直に貫く電気力線は1本である。

$$N = ES$$

ガウスの定理(前期の講義で最も重要なところ)

多数の電荷 (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) が誘電体 ϵ の媒質中に存在するとき、電界中の任意の閉曲面 S (たとえば、風船の表面) を考える。閉曲面 S から出て行く電気力線の総数 N は、その閉曲面 S 内に含まれる電荷の総和の $1/\epsilon$ に等しい。

$$N = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$\text{つまり } N = \frac{1}{\epsilon} (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)$$

電界の強さの計算方法

点電荷の場合

クーロンの法則を用いて、1 Cに働く電気力を求める。

電荷が分布している場合

ガウスの定理および電界と電気力線の関係から求める。

1. ガウスの定理に用いる閉曲面の形

電界が一定で、垂直な面を持つ閉曲面を考える。

帯電体の形状

ガウスの定理に用いる閉曲面

利用する面

(電界が一定で、電界が垂直な面)

1. 球

球

球表面

2. 円柱(円筒)

円筒

円筒の側面

3. 平面

筒または直方体

筒または直方体の底面

2. ガウスの定理

閉曲面内にQ [C]の電荷があるとき、この閉曲面から出て行く電気力線の本数は

$$\frac{Q}{\epsilon} \text{ [本]}$$

である。

3. 電界と電気力線との関係

電界の強さがE [V/m]のところで、電界に垂直な面 (S [m²]) を考える。この面を貫く電気力線の本数は

$$ES \text{ [本]}$$

である。

4. 電界を求める

ガウスの定理から求まる電気力線の数と、電界と建機力線との関係から求まる電気力線の数
が等しいことから、電界を求める。

電位の定義

+1 Cの電荷を無限遠から求めたい点まで運ぶのに必要な仕事が電位であり、単位はボルト(V)である。

$$V(r) = \int_{\infty}^r 1 \times E(x) \times (-dx)$$

仕事の定義

(力) × (力を働かした方向に移動した距離)

1 Cに働く力: $1 \times E(x)$

引っ張って移動した微小距離: $-dx$

仕事: $[1 \times E(x)] \times (-dx)$

電磁気学で必要な積分の公式(暗記するように)

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C, \quad \int dx = x + C,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

多数の電荷による電位

電荷を帯びた多数の帯電体が存在する場合、点Pでの電位 V [V]は、各帯電体による点Pでの電位 V_i [V]の足し算である。

$$V = \sum_{i=1} V_i \quad [V]$$

電位差

- A. 2点間の電位差は、各点の電位の差で求められる。
- B. 一方に +1 Cの点電荷を置き、もう一方に移動させるために必要な仕事が電位差であることを用いて、2点間の電位差を計算する。

注意事項：電位はスカラー量(大きさだけ)
電界はベクトル量(大きさと方向)

数値の足し算・引き算ができる。
ベクトルの合成が必要。

仕事、電位、電位差

電界の強さ $E(x)$ は距離 dx 移動しても変化しないとする(物理関係で用いる重要な仮定)。このとき、+1 Cの点電荷が自然に dx だけ移動したときの仕事は

$$1 \times E(x) \times dx$$

である。

点Aから点Bまで、電界に逆らって+1 Cの点電荷を移動させる(-dx)ときに必要な仕事が電位差であるから、

$$V_{BA} = \int_A^B 1 \times E(x) \times (-dx)$$

となる。

完全導体

- (1) 完全導体の内部は、電界が0 V/mである。
- (2) 完全導体の内部には、静電荷は存在しない。
(原子核の正の電荷の和と負の電子の数が等しい。)
- (3) 完全導体に帯電体を近づけると、完全導体の電荷(自由電子)が移動する。
(静電誘導)

静電容量

$$Q = CV$$

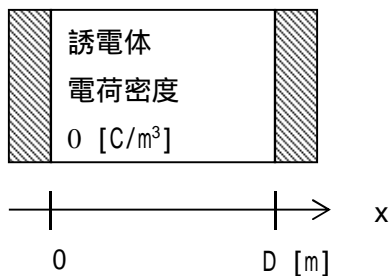


C は比例定数であり、これを静電容量と呼ぶ。単位は F (ファラッド) である。

静電容量の計算

1. 一方の導体に $+Q$ [C]、他方の導体に $-Q$ [C] を与える。
2. ガウスの定理から閉曲面を貫く電気力線の本数を計算する。
3. 電界と電気力線の関係から、閉曲面表面の電界を E [V/m] として、電気力線の本数を計算する。
4. ガウスの定理および電界と電気力線の関係から求められた電気力線の本数は等しいことを用いて、電界の強さ E [V/m] を求める。
5. 1 C の点電荷を、 $-Q$ [C] の電荷が帯電している導体から、 $+Q$ [C] の電荷が帯電している導体まで動かすのに必要な仕事 (つまり、電位差) を、積分を用いて求める。
6. 静電容量の定義 $Q = CV$ より、静電容量 C [F] を求める。

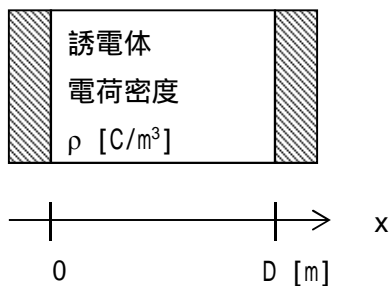
平行平板間の電位と電界



電極に固定電荷なし

ラプラス方程式

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0$$



電極間に固定電荷あり

ポアソン方程式

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

簡単な微分方程式の開放の例 (aが定数のとき)

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = a \\ \downarrow \text{1回目の積分} \\ \int \frac{dy}{dx} dx = \int a dx \\ y = ax + C \end{array} \quad (1)$$
$$\begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} = a \\ \downarrow \text{1回目の積分} \\ \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int a dx \\ \frac{dy}{dx} = ax + C_1 \\ \downarrow \text{2回目の積分} \\ \int \frac{dy}{dx} dx = \int (ax + C_1) dx \\ y = \frac{1}{2} ax^2 + C_1 x + C_2 \end{array} \quad (2)$$

電界と電位との関係 (電界の定義式)

$$E \equiv -\frac{dV}{dx}$$

6月30日の宿題

宿題1 平行平板電極間全体に、正の電荷密度 ρ [C/m³]をもつ比誘電率 ϵ の絶縁体が挿入されている。電極間に電圧 V_0 [V]を印加したときの、距離 x [m]での電位 V と電界 E を求めよ。ここで、電極間隔は d [m]、 $V(0)=0$ V、 $V(d)=V_0$ [V]とする。単位も正確に書くこと。