Poisson方程式の解法

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{eN_{\mathrm{D}}}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}} \qquad (1)$$

A.　空乏層幅Wが、膜厚dより狭い場合

境界条件

$x=0$のとき、$V=V(0)$

$x=W$のとき、$V=0$ V

(1)式の一回積分

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{eN_{\mathrm{D}}}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}x+C_1 \qquad (2)$$

二回積分

$$V=-\frac{eN_{\mathrm{D}}}{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}x^2+C_1x+C_2 \qquad (3)$$

$x=0$のとき$V=V(0)$より、$C_2=V(0)$
$x=W$のとき$V=0$より、

$$0=-\frac{eN_{\mathrm{D}}}{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}W^2+C_1W+V(0) \qquad (4)$$

$$C_1=\frac{eN_{\mathrm{D}}}{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}W-\frac{V(0)}{W} \qquad (5)$$

$$V=-\frac{eN_{\mathrm{D}}}{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}x^2+\left(\frac{eN_{\mathrm{D}}}{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}W-\frac{V(0)}{W}\right)x+V(0) \qquad (6)$$

境界条件

$x=W$のとき、$\frac{dV}{dx}=0$

(6)式にこの条件を入れて、整理すると、

$$W=\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}[-V(0)]}{eN_{\mathrm{D}}}} \qquad (7)$$

となる。これより、(6)は

$$V=V(0)\left(\frac{x-W}{W}\right)^2 \qquad (8)$$

と表される。

B.　空乏層幅Wが、膜厚dより広い場合

境界条件
$x=0$のとき$V(0)$より、$C_2=V(0)$。
$x=d$のとき、$V(d)=0$ Vより、

$$0=\frac{V(0)}{W^2}d^2+C_1d+V(0)$$

$$C_1=-\frac{V(0)}{W^2}d-\frac{V(0)}{d}$$

(3)式に、この条件を入れて、整理すると、

$$V=V(0)\left[\left(1-\frac{x}{d}\right)+\frac{x(x-d)}{W^2}\right] \qquad (9)$$

となる。